

Examen de rattrapage de Maths1.
Durée (2 heures)

Exercice 1. (6pts)

Considérons les deux applications f et g suivantes :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ x &\longrightarrow f(x) = \begin{cases} x/2, & \text{si } x \text{ est paire} \\ (x-1)/2, & \text{sinon.} \end{cases} \\ g : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ x &\longrightarrow g(x) = 2x \end{aligned}$$

Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijection de f et g .

Exercice 2. (8pts)

1) On définit sur $\mathbb{R}$ la relation binaire $\mathcal{R}_1$ par

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x\mathcal{R}_1y \iff xy(x-y) = 0$$

- a) Etudier la réflexivité, la symétrie et la transitivité de $\mathcal{R}_1$.
- b) $\mathcal{R}_1$ est-elle une relation d'équivalence ?
- c) Déterminer l'ensemble $A = \{y \in \mathbb{R}, \text{ tel que, } y\mathcal{R}_1 0\}$.

2) On définit sur $]1, +\infty[$, la relation binaire $\mathcal{R}_2$ par :

$$\forall x, y \in]1, +\infty[, \quad x\mathcal{R}_2y \iff \frac{x}{1+x^2} \geq \frac{y}{1+y^2}$$

- a) Montrer que $\mathcal{R}_2$ est une relation d'ordre.
- b) L'ordre est-il total ?

Exercice 3. (6pts)

- 1) Calculer les limites suivantes : a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^3-1}$, b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$, c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\sin(\pi x)}$
- 2) Soient α et β deux nombres réels. On définit la fonction f par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta, & \text{si } x \leq 1 \\ x^2, & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

- a) Donner une relation entre α et β pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.
- b) Déterminer α et β pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$.